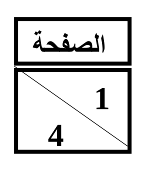


الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
الموضوع





المـــــــادة:	الرياضيات	NS24		المعامل:	9
الشعـــب(ة) أو المسلك :	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)			مدة الإنجاز:	4

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية....................(3.5ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية......................(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات..........................(3ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل............................(6.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.........................(3,75ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول :(3.5 نقط) الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.

I– نزود المجموعة $I=]0,+\infty[$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي:

$$(\forall(a,b)\in I\times I)\quad a*b=e^{\ln(a)\cdot\ln(b)}$$

1) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في I . 0.5

2) بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا ε في I يتم تحديده. 0.25

3) أ– بين أن $(I\setminus\{1\},*)$ زمرة تبادلية. ($I\setminus\{1\}$ هي المجموعة I محرومة من 1) 0.75

ب– بين أن $]1,+\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I\setminus\{1\},*)$. 0.25

4) نزود I بقانون التركيب الداخلي $\times$ ($\times$ هو الضرب في $\mathbb{R}$)

أ– بين أن القانون $*$ توزيعي بالنسبة للقانون $\times$ 0.25

ب– بين أن $(I,\times,*)$ جسم تبادلي. 0.5

II– نعتبر المصفوفة :
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

1) أحسب A^2 و A^3 . 0.5

2) استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا . 0.5

التمرين الثاني :(3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1) أ– حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي : $3+4i$ 0.25

ب– حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):4z^2-10iz-7-i=0$ 0.5

2) ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث: $\mathrm{Re}(a)<0$ والنقطتين A و B صورتي a و b على التوالي.

أ– تحقق أن: $\dfrac{b}{a}=1-i$ 0.25

ب– استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في A . 0.75

3) لتكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولتكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\dfrac{\pi}{2}$ ولتكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AO}$.

أ– حدد بدلالة c العدد العقدي d لحق النقطة D. 0.5

ب– حدد بدلالة c العدد العقدي ℓ لحق النقطة L . 0.5

ج– حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\dfrac{\ell-c}{a-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACL . 0.75

التمرين الثالث:(3 نقط)

1 | 1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث: $m^2+1\equiv 0 \quad [5]$

2) ليكن p عددا أوليا بحيث : $p=3+4k$ مع k عدد صحيح طبيعي.

و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n^2+1\equiv 0\,[p]$

0.25 | أ- تحقق أن: $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv -1\,[p]$

0.5 | ب- بين أن n و p أوليان فيما بينهما.

0.75 | ج- استنتج أن: $\left(n^2\right)^{1+2k}\equiv 1\,[p]$

0.5 | د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق: $n^2+1\equiv 0\,[p]$

التمرين الرابع:(6.25 نقط)

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي: $f(x)=4xe^{-x^2}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.5 | 1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

0.75 | 2) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .

0.75 | 3) حدد معادلة نصف المماس للمنحنى (C) في أصل المعلم ثم أنشئ (C).

(نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$ و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى (C))

0.5 | 4)أحسب التكامل $a=\int_0^1 f(x)dx$ ثم استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحوري المعلم و المستقيم الذي معادلته $x=1$

II- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=4x^ne^{-x^2}$

0.25 | 1) أ- بين أن: $e^{-x^2}<e^{-x} \quad (\forall x>1)$

0.25 | ب- استنتج نهاية الدالة f_n عندما تؤول x إلى $+\infty$.

0.75 | 2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها .

0.5 | 3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $]0,1[$ بحيث : $f_n(u_n)=1$

0.25 | 4) أ- تحقق أن : $f_{n+1}(u_n)=u_n \quad (\forall n\geq 2)$

0.75 | ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة .

5) نضع : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

أ- بين أن : $0 < \ell \le 1$ — 0.25

ب- بين أن : $-\dfrac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \dfrac{1}{n} - \dfrac{\ln(4)}{n} \quad (\forall n \ge 2)$ — 0.25

ج- استنتج أن : $\ell = 1$ — 0.5

التمرين الخامس:(3.75 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

1) بين أن الدالة F فردية . — 0.25

2) لكل x من المجال $]0,+\infty[$ نضع : $\varphi(x) = \int_1^x \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}dt$

أ- تحقق أن: $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x) \quad (\forall x > 0)$ — 0.25

ب- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$ — 0.5

ج- استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال $]0,+\infty[$. — 0.5

3) أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن: $(\forall x > 0)\ (\exists c \in]x,2x[) : \ F(x) = \dfrac{x}{\ln(1+c^2)}$ — 0.5

ب- استنتج أن: $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \dfrac{x}{\ln(1+x^2)} \quad : \quad (\forall x > 0)$ — 0.25

ج-حدد النهايات : $\lim\limits_{x\to0^+} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$. — 0.75

د- تحقق أن : $F\left(\sqrt{e-1}\right) < \sqrt{e-1}$ و $F\left(\dfrac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \dfrac{\sqrt{e-1}}{2}$ — 0.75

ثم استنتج أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في $]0,+\infty[$.